

Définition :

Une portion de poutre est sollicitée en flexion simple suivant l'axe \vec{z} si pour chacune des sections droites, le torseur de cohésion se réduit, dans le repère $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations :

$$\{T_{coh}\} = \{E_2 \rightarrow E_1\} = \begin{Bmatrix} R \\ \underline{M}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

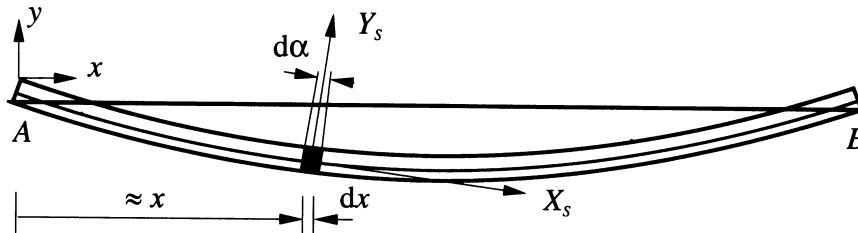
Remarque : si T_y est nul, alors la sollicitation est appelée *flexion pure*

Relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant

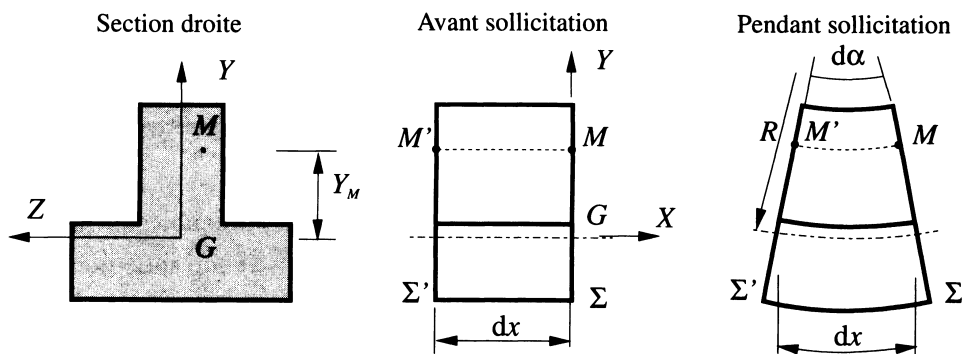
$$\frac{dMf_z}{dx} = -T_y$$

Etude des contraintes normales

La poutre étant sollicitée en flexion simple, la ligne caractéristique peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R appelé *rayon de courbure*



Au cours de la déformation, le tronçon considéré initialement prismatique se transforme en portion de tore de rayon moyen R intercepté d'un angle $d\alpha$



MM' est une fibre du tronçon joignant deux points homologues des sections Σ et Σ'

Les fibres situées dans le plan (G, \vec{x}, \vec{z}) ne varient pas et sont appelées *fibres neutres*

Les fibres au dessus de G ($Y > 0$) se raccourcissent et celles en dessous de G ($Y < 0$) s'allongent

Allongement / Raccourcissement relatif de la fibre M'M

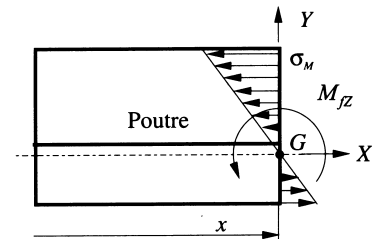
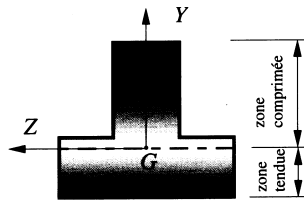
- coordonnées du point M (Y_M, Z_M) dans le repère local $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- longueur initiale $M'M = dx$

allongement relatif :

$$\varepsilon = -Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$

Expression de la contrainte normaleEn exprimant la loi de Hooke définie par la relation $\sigma = \varepsilon.E$, on obtient :

$$\sigma_M = -E.Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$

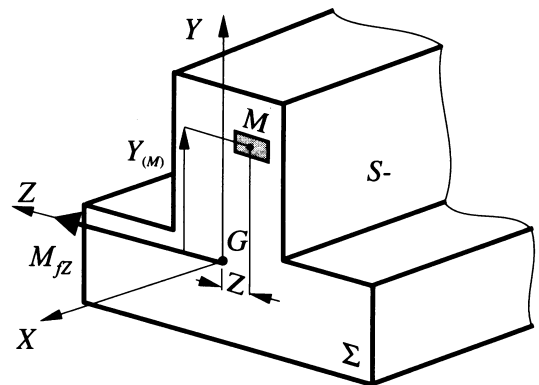


- la contrainte normale est nulle sur la fibre neutre
- le signe s'inverse à la traversée du plan (G, \vec{x}, \vec{z})
- la répartition est linéaire sur la section droite
- le point le plus sollicité est celui qui est le plus éloigné de la fibre neutre

Relation entre contrainte normale et moment fléchissantUne coupure est effectuée au niveau de la section droite Σ Soit un point M de coordonnées (X_M, Y_M, Z_M) et $d\Sigma$ un élément de surface entourant M

L'action mécanique de cohésion s'écrit :

$$\{S+ \rightarrow S-\}_M = \begin{Bmatrix} \sigma_M.d\Sigma & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} \sigma_M.d\Sigma & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Y_M.\sigma_M.d\Sigma \end{Bmatrix}_G$$

Le moment fléchissant M_{fz} est la somme des moments en G des actions mécaniques élémentaires transmises par les éléments de surface $d\Sigma$ constituant la section droite avec $dM_{fz} = -Y_M.\sigma_M.d\Sigma$

$$M_{fz} = -\int_{\Sigma} Y_M.\sigma_M.d\Sigma = \int_{\Sigma} Y_M^2 E \frac{d\alpha}{dx} d\Sigma = E \frac{d\alpha}{dx} \int_{\Sigma} Y_M^2 d\Sigma = -\frac{\sigma_M}{Y_M} \int_{\Sigma} Y_M^2 d\Sigma \quad \text{donc} \quad \sigma_M = -\frac{M_{fz}.Y_M}{\int_{\Sigma} Y_M^2 d\Sigma}$$

<div>B.T.S.</div> <div>C.R.S.A.</div>			RDM		
		FLEXION SIMPLE			Fiche 3

Moment quadratique

La somme $\int_{\Sigma} Y^2.d\Sigma$ (mm^4) est le moment quadratique de la section droite

Σ par rapport à l'axe Gz que l'on notera I_{Gz} . Le moment quadratique dépend uniquement de la géométrie de la section droite

$$I_{Gz} = \int_{\Sigma} Y^2.d\Sigma$$

VALEURS DE MOMENTS QUADRATIQUES PARTICULIERS

SECTIONS PRÉSENTANT UNE SYMÉTRIE CENTRALE

Sections (S) Caractéristiques						
I_{Gy}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{hb^3 - h'b'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0,784 ab^3$
I_{Gz}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0,784 a^3 b$
$I_G = I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{4}ab(a^2 + b^2)$
Module de flexion * μ_{Gy}	$\frac{hb^2}{6}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6b}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$	$0,784 ab^2$
Module de flexion * μ_{Gz}	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4)$	$0,784 ba^2$

Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une section par rapport à un axe contenu dans son plan est égal au moment quadratique de cette section par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son barycentre, augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

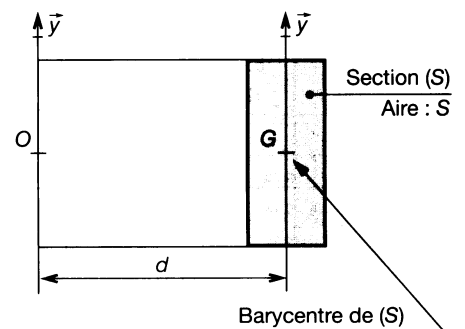
$$I_{Oy} = I_{Gy} + S.d^2$$

I_{Oy} : moment quadratique de (S) par rapport à (O, \vec{y}) (mm^4)

I_{Gy} : moment quadratique de (S) par rapport à (G, \vec{y}) (mm^4)

S : aire de la section (S) (mm^2)

d : distance entre les axes (O, \vec{y}) et (G, \vec{y}) (mm)



Exemple : calculer le moment quadratique de l'équerre / $G\vec{x}$: I_{Gx}

Décomposer (S) en deux rectangles (1) AKEF et (2) BCDK

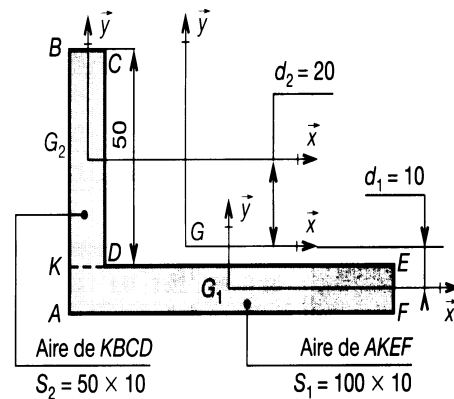
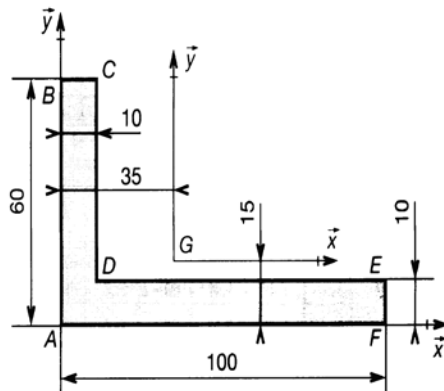
$$I_{1G1x} = \frac{100 \cdot 10^3}{12} ;$$

$$I_{1Gx} = I_{1G1x} + S_1 \cdot d^2 = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + (100 \cdot 10) \cdot 10^2 = \frac{10^5}{12} + 10^5$$

$$I_{2G2x} = \frac{10 \cdot 50^3}{12}$$

$$I_{2Gx} = I_{2G2x} + S_2 \cdot d^2 = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + (50 \cdot 10) \cdot 20^2 = \frac{125 \cdot 10^4}{12} + 20 \cdot 10^4$$

$$I_{Gx} = I_{1Gx} + I_{2Gx} = 41,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



Module de flexion

On appelle module de flexion la quantité $\frac{I_{GZ}}{Y_{\max}}$ en mm^3 . C'est une caractéristique courante des profilés.

Contrainte normale maximale

σ_{\max} = contrainte normale maximale (Mpa)

$\frac{I_{GZ}}{Y_{\max}}$ = module de flexion (mm^3)

Mf_z = moment de flexion sur \vec{z} (N.mm)

$$\sigma_{\max} = \frac{Mf_z}{\frac{I_{GZ}}{Y_{\max}}}$$

Condition de résistance à la contrainte normale

R_{pe} : contrainte pratique de limite élastique (Mpa) = $\frac{R_e}{s}$

R_e : contrainte de limite élastique (Mpa)

s : coefficient de sécurité

σ_{\max} = contrainte normale maximale (Mpa)

kt : coefficient de concentration de contrainte

$$kt \cdot \sigma_{\max} \leq R_{pe}$$

<div>B.T.S.</div> <div>C.R.S.A.</div>			RDM		
		FLEXION SIMPLE			Fiche 5

Déformations

Soit une poutre AB sollicitée en flexion simple et $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère d'étude global qui ne se déplace pas lorsque la poutre se déforme.

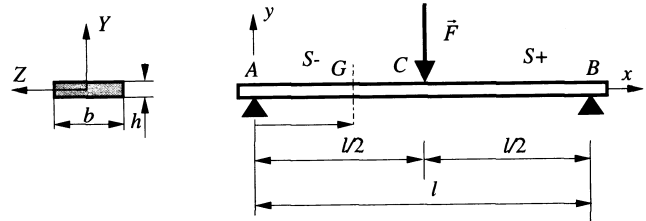
\mathcal{C} est la ligne caractéristique de la poutre déformée considérée comme la graphe de la fonction $y=f(x)$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E.I_{GZ}}$$

l'équation de la déformée s'obtient par intégration successive de y''

Exemple

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E.I_{GZ}} = \frac{\frac{F \cdot x}{2}}{E.I_{GZ}} = \frac{F \cdot x}{2.E.I_{GZ}}$$



$$2.E.I_{GZ} \cdot y'' = F \cdot x$$

première intégration

$$2.E.I_{GZ} \cdot y' = F \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$4.E.I_{GZ} \cdot y' = F \cdot x^2 + C_1$$

recherche de C_1 : $y' = 0$ pour $x = l/2$ (symétrie de la déformée)

$$0 = F \cdot \frac{l^2}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{F \cdot l^2}{4}$$

$$4.E.I_{GZ} \cdot y' = F \cdot x^2 - \frac{F \cdot l^2}{4}$$

deuxième intégration :

$$4.E.I_{GZ} \cdot y = F \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{F \cdot l^2}{4} \cdot x + C_2 = \frac{F \cdot x^3}{3} - \frac{F \cdot l^2 \cdot x}{4} + C_2 = \frac{4 \cdot F \cdot x^3 - 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot x}{12} + C_2$$

recherche de C_2 : $y = 0$ pour $x = 0$ (appui ponctuel d'axe \vec{y})

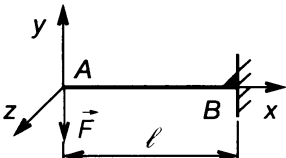
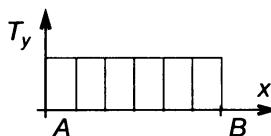
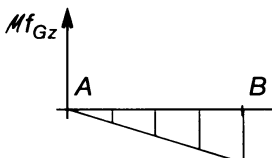
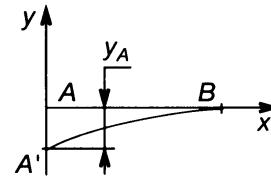
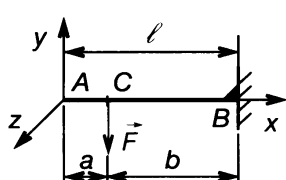
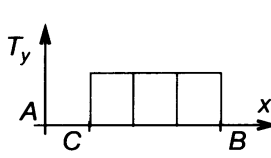
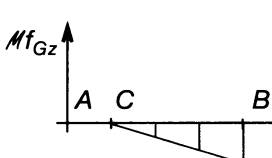
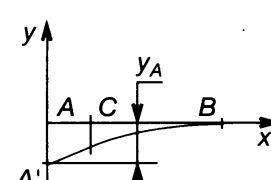
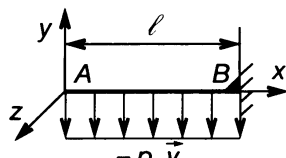
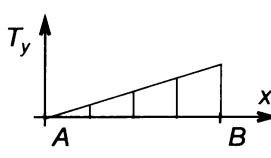
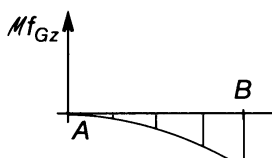
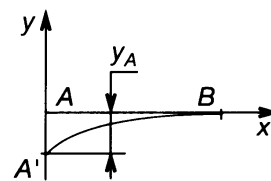
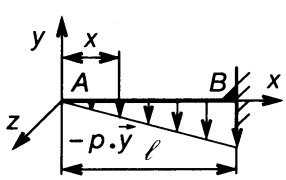
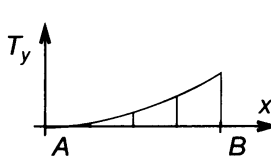
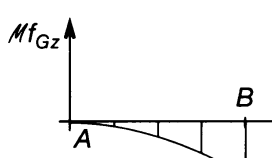
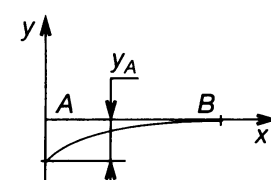
$$y = \frac{4 \cdot F \cdot x^3 - 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot x}{48.E.I_{GZ}} \quad y \text{ est maxi pour } x = l/2 \text{ (symétrie de la déformée)}$$

$$y = \frac{4 \cdot F \cdot \frac{l^3}{8} - 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot \frac{l}{2}}{48.E.I_{GZ}} = \frac{F \left(\frac{4l^3}{8} - \frac{3l^3}{2} \right)}{48.E.I_{GZ}} = \frac{F \left(\frac{l^3}{2} - \frac{3l^3}{2} \right)}{48.E.I_{GZ}} = \frac{-F \left(\frac{2l^3}{2} \right)}{48.E.I_{GZ}}$$

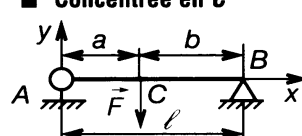
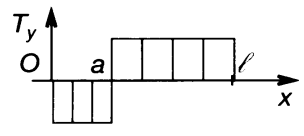
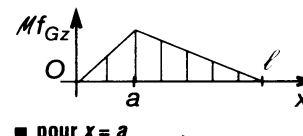
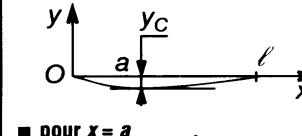
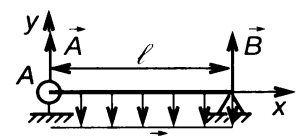
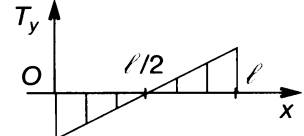
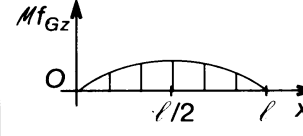
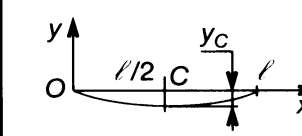
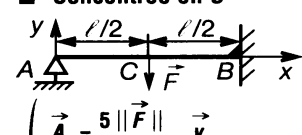
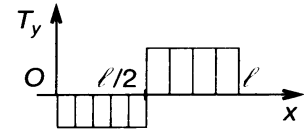
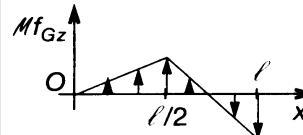
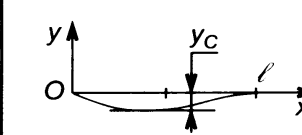
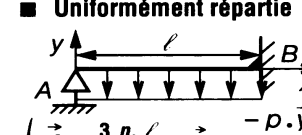
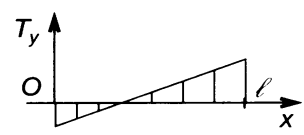
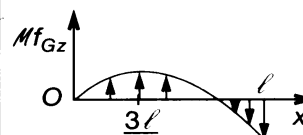
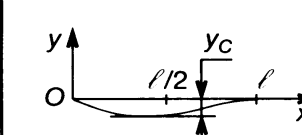
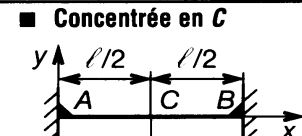
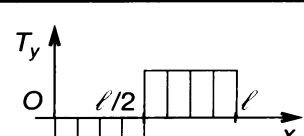
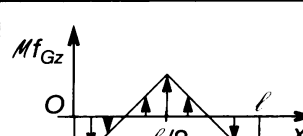
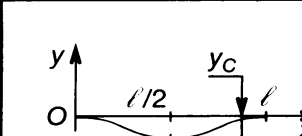
$$y = \frac{F \cdot l^3}{48.E.I_{GZ}}$$

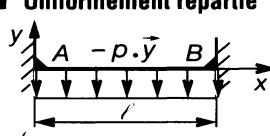
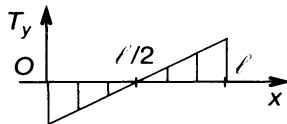
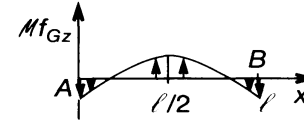
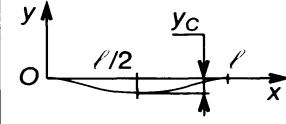
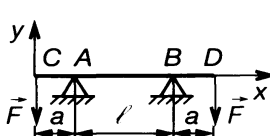
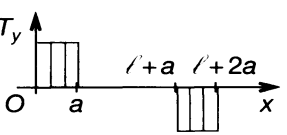
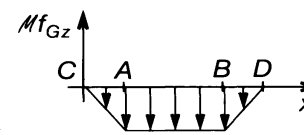
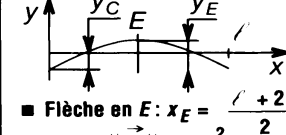
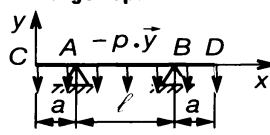
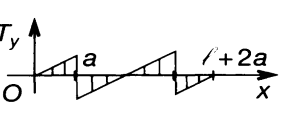
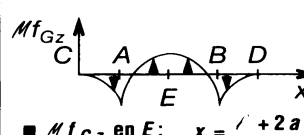
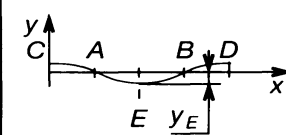
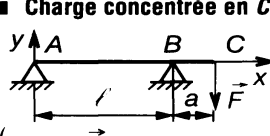
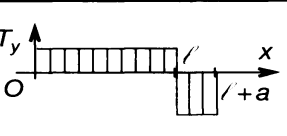
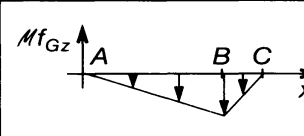
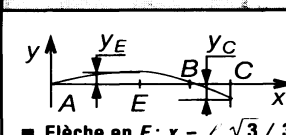
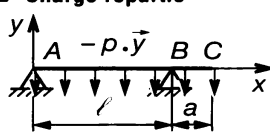
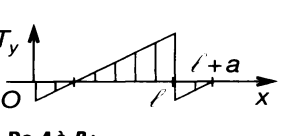
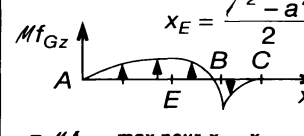
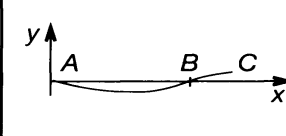
Formulaire des poutres

POUTRES SUR UN APPUI

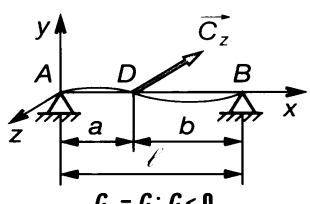
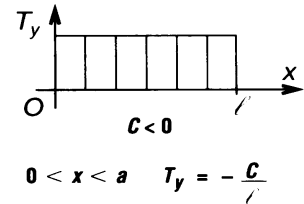
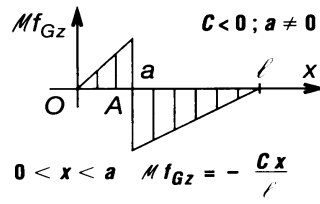
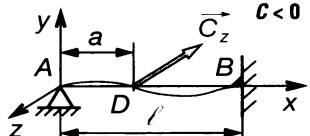
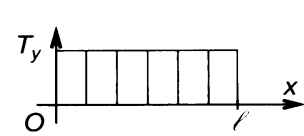
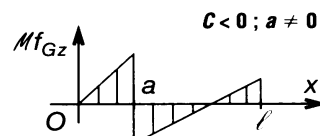
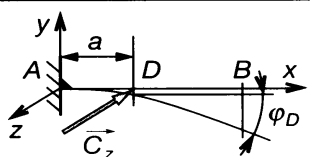
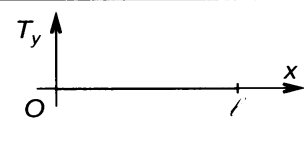
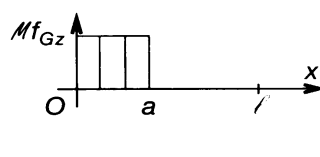
Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Concentrée en A  $\begin{cases} \vec{B} = -\vec{F} = \ \vec{F}\ \cdot \vec{y} \\ \text{(avec } F < 0) \\ \vec{M}_B = -\ \vec{F}\ \cdot \ell \cdot \vec{z} \end{cases}$	 avec $F < 0$ $T_y = + \ \vec{F}\ $ constant entre A et B	 avec $F < 0$ Moment de flexion en B : $M_{Gz} = -\ \vec{F}\ \cdot \ell$	 Flèche en A : $F < 0$ $y_A = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot \ell^3}{3 E \cdot I_{Gz}}$
■ Concentrée en C  $\begin{cases} \vec{B} = -\vec{F} \\ \text{avec } F < 0 \\ \vec{M}_B = \ \vec{F}\ \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_B = -\ \vec{F}\ \cdot b \cdot \vec{z} \end{cases}$	 Entre A et C : $T_y = 0$ Entre C et B : avec $F < 0$ $T_y = \ \vec{F}\ $	 Moment de flexion en B : avec $F < 0$ $M_{Gz} = -\ \vec{F}\ \cdot b$	 Flèche en A : $y_A = -\frac{\ \vec{F}\ (\ell - a)^2 (2\ell + a)}{6 E \cdot I_{Gz}}$
■ Uniformément répartie  p : coefficient de charge (N / m) $\begin{cases} \vec{B} = p \cdot \ell \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_B = -\frac{p \cdot \ell^2}{2} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 Effort tranchant max en B : $T_{y \max} = p \cdot \ell$	 Moment de flexion en B : $M_{Gz} = -\frac{p \cdot \ell^2}{2}$	 Flèche en A : $y_A = -\frac{p \cdot \ell^4}{8 E \cdot I_{Gz}}$
■ Linéairement répartie  avec $p = k \cdot x$ $\begin{cases} \vec{B} = \frac{k \cdot \ell^2}{2} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_B = -\frac{k \cdot \ell^3}{6} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 Effort tranchant max en B : $T_{y \max} = \frac{k \cdot \ell^2}{2}$	 Moment de flexion en B : $M_{Gz} = -\frac{k \cdot \ell^3}{6}$	 Flèche en A : $y_A = -\frac{k \cdot \ell^5}{30 E \cdot I_{Gz}}$

POUTRES SUR DEUX APPUIS AUX EXTRÉMITÉS

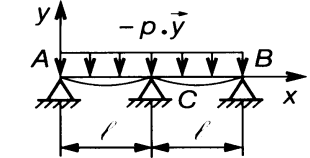
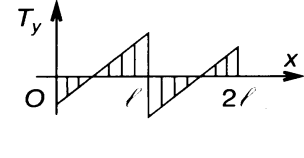
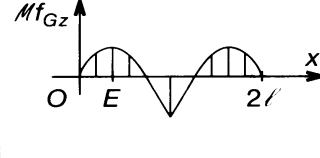
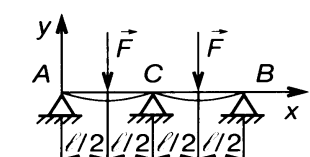
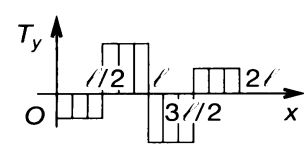
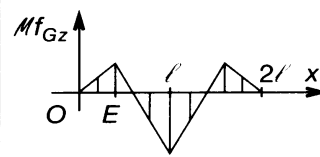
Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Concentrée en C  $\begin{cases} \vec{A} = \frac{\ \vec{F}\ \cdot b}{l} \cdot \vec{y}; \vec{M}_A = \vec{0} \\ \vec{B} = \frac{\ \vec{F}\ \cdot a}{l} \cdot \vec{y}; \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$	 De A à C: $T_y = -\frac{\ \vec{F}\ }{l} \cdot b$ De C à B: $T_y = +\frac{\ \vec{F}\ }{l} \cdot a$	 ■ pour $x = a$ $Mf_{Gz} = \frac{\ \vec{F}\ \cdot a \cdot b}{l}$ ■ si $a = \frac{l}{2}$ $Mf_{Gz} = \frac{\ \vec{F}\ \cdot l^2}{4}$	 ■ pour $x = a$ $y_C = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot a^2 \cdot b^2}{3 E \cdot I_{Gz} \cdot l}$ ■ si $a = \frac{l}{2}$ $y_C = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot l^3}{48 E \cdot I_{Gz}}$
■ Uniformément répartie  $\begin{cases} \vec{A} = \vec{B} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \vec{y}; \vec{M}_A = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{0}; \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$	 $T_y = px - p \cdot l/2$ en A: $T_y = -p \cdot l/2$ en B: $T_y = p \cdot l/2$	 $Mf_{Gz} \text{ max pour } x = l/2$ $Mf_{Gz} / \text{max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$	 Flèche en C: $x_C = \frac{l}{2}$ $y_C = -\frac{5p \cdot l^4}{384 E \cdot I_{Gz}}$
■ Concentrée en C  $\begin{cases} \vec{A} = \frac{5\ \vec{F}\ }{16} \cdot \vec{y} \\ \vec{B} = \frac{11\ \vec{F}\ }{16} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_B = -\frac{3\ \vec{F}\ \cdot l}{16} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 De A à C: $T_y = -\frac{5\ \vec{F}\ }{16}$ De C à B: $T_y = \frac{11\ \vec{F}\ }{16}$	 $Mf_{Gz} \text{ est max pour } x = l/2$ $Mf_{Gz} = \frac{5\ \vec{F}\ \cdot l}{32}$	 Flèche en C: $y_C = -\frac{7\ \vec{F}\ \cdot l^3}{768 E \cdot I_{Gz}}$
■ Uniformément répartie  $\begin{cases} \vec{A} = \frac{3p \cdot l}{8} \cdot \vec{y} \\ \vec{B} = \frac{5p \cdot l}{8} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_B = -\frac{p \cdot l^2}{8} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 $T_y = px - 3p \cdot l/8$ en A: $T_y = -3p \cdot l/8$ en B: $T_y = 5p \cdot l/8$	 $Mf_{Gz} \text{ est max pour } x = \frac{3l}{8}$ $Mf_{Gz} / \text{max} = \frac{9p \cdot l^2}{128}$	 Flèche en C: $x = \frac{l}{2}$ $y_C = -\frac{p \cdot l^4}{192 E \cdot I_{Gz}}$
■ Concentrée en C  $\begin{cases} \vec{A} = \vec{B} = \frac{\ \vec{F}\ }{2} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_A = -\vec{M}_B = \frac{\ \vec{F}\ \cdot l}{8} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 De A à C: $T_y = -\frac{\ \vec{F}\ }{2}$ De C à B: $T_y = +\frac{\ \vec{F}\ }{2}$	 $Mf_{Gz} \text{ est maximal pour } x = l/2$ $Mf_{Gz} = \frac{\ \vec{F}\ \cdot l}{8}$	 Flèche en C: $y_C = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot l^3}{192 E \cdot I_{Gz}}$

Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Uniformément répartie  $\begin{cases} \vec{A} = \vec{B} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_A = -\vec{M}_B = \frac{p \cdot l^2}{12} \cdot \vec{z} \end{cases}$	 $T_y = px - \frac{p \cdot l}{2}$ en A: $T_y = -\frac{p \cdot l}{2}$ en B: $T_y = \frac{p \cdot l}{2}$	 $Mf_{Gz} \text{ est max pour : } x = \frac{l}{2}$ $Mf_{Gz} = \frac{p \cdot l^2}{24}$	 Flèche en C: $x_C = \frac{l}{2}$ $y_C = -\frac{p \cdot l^4}{384 E \cdot I_{Gz}}$
POUTRE SUR DEUX APPUIS AVEC PORTE-À-FAUX SYMÉTRIQUE			
Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Deux charges concentrées  $\begin{cases} \vec{A} = \vec{B} = \ \vec{F}\ \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$	 Entre C et A: $T_y = \ \vec{F}\ $ Entre B et D: $T_y = -\ \vec{F}\ $	 $Mf_{Gz} \text{ entre A et B: } Mf_{Gz} = -\ \vec{F}\ \cdot a$	 ■ Flèche en E: $x_E = \frac{l+2a}{2}$ $y_E = \frac{\ \vec{F}\ \cdot a \cdot l^2}{8 E \cdot I_{Gz}}$ ■ En C: $y_C = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot a^2}{6 E \cdot I_{Gz}} (3l+2a)$
■ Charge répartie  $\begin{cases} \vec{A} = \vec{B} = \frac{p}{2} (l+2a) \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$	 Entre C et A: $T_y = px$ De A à B: $T_y = px - \frac{p(l+2a)}{2}$	 ■ $Mf_{Gz} \text{ en E: } x = \frac{l+2a}{2}$ $Mf_{Gz} = \frac{p}{8} (l^2 - 4a^2)$ ■ En A: $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot a^2}{2}$	 ■ Flèche en E: $x_E = \frac{l+2a}{2}$ $y_E = -\frac{p \cdot l^4}{16 E \cdot I_{Gz}} \left(\frac{5}{24} - \frac{a^2}{l^2} \right)$
POUTRES SUR DEUX APPUIS AVEC PORTE-À-FAUX UNILATÉRAL			
Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Charge concentrée en C  $\begin{cases} \vec{A} = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot a}{l} \cdot \vec{y}; \vec{M}_A = \vec{0} \\ \vec{B} = \frac{\ \vec{F}\ }{l} (l+a) \cdot \vec{y}; \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$	 Entre A et B: $T_y = \frac{\ \vec{F}\ \cdot a}{l}$ Entre B et C: $T_y = -\ \vec{F}\ $	 $Mf_{Gz} \text{ en B: } Mf_{Gz} = -\ \vec{F}\ \cdot a$	 ■ Flèche en E: $x = l\sqrt{3}/3$ $y_E = \frac{\ \vec{F}\ \cdot a \cdot l^2 \sqrt{3}}{27 E \cdot I_{Gz}}$ ■ en C: $y_C = -\frac{\ \vec{F}\ \cdot a^2 (a+l)}{3 E \cdot I_{Gz}}$
■ Charge répartie  $\begin{cases} \vec{A} = \frac{p}{2l} (l^2 - a^2) \cdot \vec{y} \\ \vec{B} = \frac{p}{2l} (l+a)^2 \cdot \vec{y} \end{cases}$	 De A à B: $T_y = px - \frac{p}{2l} (l^2 - a^2)$ De B à C: $T_y = -p(l+a) + px$	 ■ $Mf_{Gz} \text{ max pour } x = x_E$ $Mf_{Gz} = \frac{p}{8l^2} (l^2 - a^2)$ ■ En B: $Mf_{Gz} = -\frac{p \cdot a^2}{2}$	

POUTRES SUPPORTANT UN COUPLE

Charges - Déformées	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
 $C_z = C; C < 0$ $\vec{A} = \frac{C}{l} \cdot \vec{y}; \vec{B} = -\frac{C}{l} \cdot \vec{y}$	 $C < 0$ $0 < x < a \quad T_y = -\frac{C}{l}$ $a < x < l \quad T_y = -\frac{C}{l}$	 $C < 0; a \neq 0$ $0 < x < a \quad M_{Gz} = -\frac{Cx}{l}$ $a < x < l \quad M_{Gz} = \frac{C(l-x)}{l}$	<p>Flèche en D :</p> $y_D = \frac{1}{E \cdot I_{Gz}} \cdot \frac{C \cdot a \cdot b (b-a)}{3}$ $\varphi_A = -\frac{C}{6E \cdot I_{Gz} \cdot l} \cdot (l^2 - 3b^2)$ $\varphi_B = -\frac{C}{6E \cdot I_{Gz} \cdot l} \cdot (l^2 - 3a^2)$
 $C < 0$ $\vec{A} = -\vec{B} = \frac{3C}{2l^3} (l^2 - a^2) \cdot \vec{y}$ $\vec{M}_B = \left \frac{C}{2l^2} (l^2 - 3a^2) \right \cdot \vec{z}$	 $0 < x < a \quad T_y = -A$ $a < x < l \quad T_y = -A$	 $C < 0; a \neq 0$ $M_{Gz} = -\frac{3C}{2l^3} (l^2 - a^2) \cdot x$ $M_{Gz} = +\frac{C}{2l^3} [2l^3 - 3(l^2 - a^2) \cdot x]$	$0 < x < a$ $y = -\frac{C(l-a)x}{4E \cdot I_{Gz} \cdot l^3} \dots$ $\dots \left[\frac{l^2}{2} (3a-l) - (l+a)x^2 \right]$ $\varphi_A = -\frac{C}{4E \cdot I_{Gz} \cdot l} (l-a)(l-3a)$
 $C < 0$ $\vec{R}_A = \vec{0}$ $\vec{M}_A = -C \cdot \vec{z}$	 $x < a \quad T_y = 0$ $x > a \quad T_y = 0$	 $C < 0$ $x < a; M_{Gz} = -C$ $x > a; M_{Gz} = 0$	$f_D = \frac{C a^2}{2E \cdot I_{Gz}}$ $f_B = \frac{C a}{E \cdot I_{Gz}} \left(\frac{l-a}{2} \right)$ $\varphi_D = \frac{C a}{E \cdot I_{Gz}} = \varphi_B$

POUTRES SUR TROIS APPUIS DE NIVEAU

 $\vec{A} = \vec{B} = 0,375 p \cdot l \cdot \vec{y}$ $\vec{C} = 1,250 p \cdot l \cdot \vec{y}$ $\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_C = \vec{0}$	 $0 < x < l$ $T_y = p x - 0,375 p \cdot l$ $l < x < 2l$ $T_y = p x - 1,625 p \cdot l$	 $0 < x < l; M_{Gz} = 0,07 p \cdot l^2$ $M_{Gz} = -0,125 p \cdot l^2$ $l < x < 2l; M_{Gz} = 0,07 p \cdot l^2$	<p>Flèche pour $x_E = 0,42 l$</p> $f_E = -0,043 \frac{p \cdot l^4}{E \cdot I_{Gz}}$
 $\vec{A} = \vec{B} = \frac{5F}{16} \cdot \vec{y}$ $\vec{C} = \frac{11F}{8} \cdot \vec{y}$	 $0 < x < l/2 \quad T_y = -5F/16$ $l/2 < x < l \quad T_y = 11F/16$ $l < x < 3l/2 \quad T_y = -11F/16$ $3l/2 < x < 2l \quad T_y = -5F/16$	 $x = \frac{l}{2}; M_{Gz} = \frac{5F \cdot l}{32}$ $x = l; M_{Gz} = -\frac{3F \cdot l}{16}$	<p>pour $x_E = \frac{l \sqrt{5}}{5}$</p> $f_E = -\frac{F \cdot l^3}{240 E \cdot I_{Gz}}$

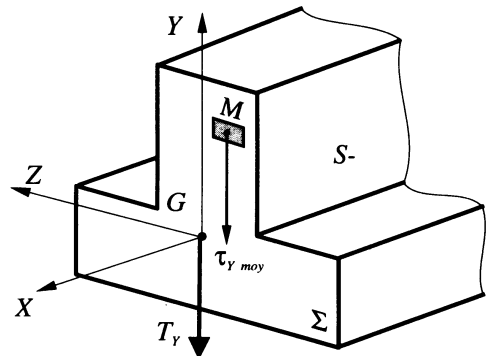
Contrainte tangentielle

T_y est l'effort tranchant (N)

S est la surface de la coupure Σ (mm²)

τ_{Ymoy} est la contrainte tangentielle (Mpa)

$$\tau_{Ymoy} = \frac{T_y}{S}$$

**Contrainte tangentielle maximale**

Section rectangulaire

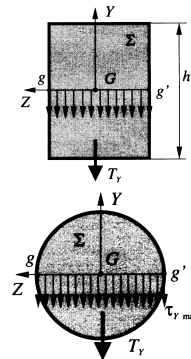
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{moy}$$

Section circulaire

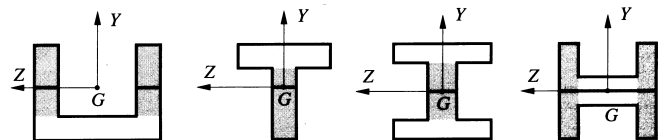
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_{moy}$$

Autres sections

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{moy}}{S_A}$$



Si l'épaisseur est petite devant les autres dimensions transversales, on peut considérer que seule la section S_A (partie grisée) travaille au cisaillement

**Condition de résistance à la contrainte tangentielle**

R_{pg} : contrainte pratique de limite au glissement (Mpa) = $\frac{R_g}{s}$

R_g : contrainte de limite élastique au glissement (Mpa)

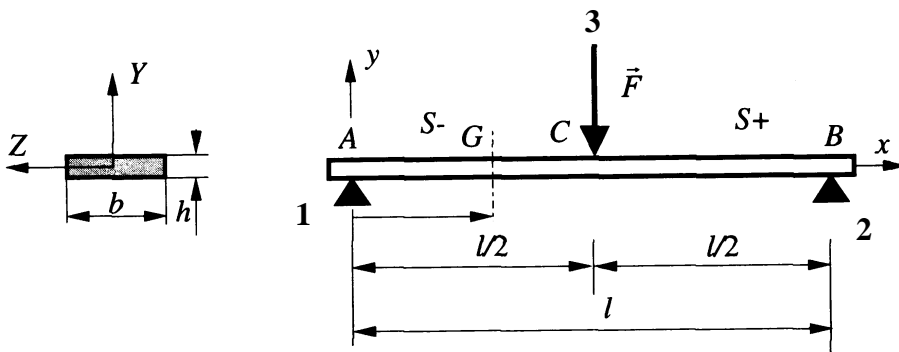
s : coefficient de sécurité

τ_{\max} = contrainte tangentielle maximale (Mpa)

$$\tau_{Y\max} \leq R_{pg}$$

La contrainte limite au glissement R_g s'exprime en fonction de la contrainte limite à l'extension R_e

- matériaux ductiles : $R_g = 0.5 R_e$
- matériaux peu ductiles : $R_g = 0.6 R_e$ ou $R_g = 0.7 R_e$
- matériaux à décohésion franche : $R_g = 0.9 R_e$

Exemple

$F = 21 \text{ N}$
 $l = 600 \text{ mm}$
 $b = 20 \text{ mm}$
 $h = 4 \text{ mm}$
 Matière : A60
 $E = 200\,000 \text{ Mpa}$
 $R_e = 340 \text{ Mpa}$
 $R_g = 0.6 R_e$
 $s = 2$

Etude statique

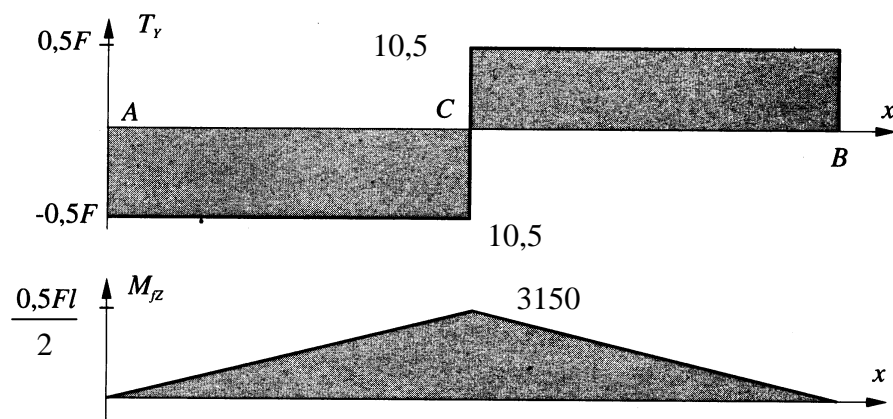
On déduit $Y_{1 \rightarrow S} = Y_{2 \rightarrow S} = \frac{F_{3 \rightarrow S}}{2} = 10,5 \text{ N}$ donc $A_{1 \rightarrow S} = 10,5 \vec{y}$ et $B_{2 \rightarrow S} = 10,5 \vec{y}$

Torseur de cohésion pour $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$\{T_{coh}\} = \{S_+ \rightarrow S_-\} = - \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0,5F & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -0,5F & 0 \\ 0 & 0,5xF \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -10,5 & 0 \\ 0 & 10,5x \end{array} \right\}_{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

Torseur de cohésion pour $\frac{l}{2} \leq x \leq l$

$$\{T_{coh}\} = \{S_- \rightarrow S_+\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0,5F & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0,5F & 0 \\ 0 & 0,5F(l-x) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 10,5 & 0 \\ 0 & -10,5x + 6300 \end{array} \right\}_{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

Diagrammes

<div>B.T.S.</div> <div>C.R.S.A.</div>	RDM		
		FLEXION SIMPLE	Fiche 12

Contrainte normale maximale

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{fz}}{I_{GZ}} = \frac{M_{fz} \cdot Y_{\max}}{I_{GZ}} = \frac{M_{fz} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3150.2}{\frac{20.4^3}{12}} = 59,0625 \text{ MPa}$$

Condition de résistance

$$\sigma_{\max} \leq R_{pe} \rightarrow \sigma_{\max} \leq \frac{R_e}{s} \rightarrow 59 \leq \frac{340}{2} \rightarrow 59 \leq 170 \quad \text{la condition est vérifiée avec un rapport } \frac{\sigma_{\max}}{R_e} = 0.17$$

Contrainte tangentielle maximale

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{moy}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0.5F}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10.5}{20.4} = 0.19 \text{ MPa}$$

Condition de résistance

$$\tau_{\max} \leq R_{pg} \rightarrow \tau_{\max} \leq 0.6 \frac{R_e}{s} \rightarrow 0.19 \leq 0.6 \cdot \frac{340}{2} \rightarrow 0.19 \leq 102 \quad \text{la condition est vérifiée avec un rapport } \frac{\tau_{\max}}{R_e} = 0.00059$$

Conclusion

La poutre soumise à la flexion simple est plus sensible aux contraintes normales qu'aux contraintes tangentielles.

Le calcul de résistance d'une poutre sollicitée en flexion simple se fait selon le critère de la contrainte normale

Calcul de la flèche maximale

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P l^3}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{21.600^3}{48 \cdot 200000 \cdot \frac{20.4^3}{12}} = 4.42 \text{ mm}$$

Calcul de la flèche sans l'aide du formulaire

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_{GZ}} = \frac{3150}{200000 \cdot \frac{20.4^3}{12}} = 0,000148$$

$$y'(x) = 0,000148 \cdot x + C_1 \quad y'(x) = 0 \text{ pour } x = l/2 = 300 \text{ mm} \quad C_1 = -0,000148 \cdot 300 = -0,044297$$

$$y'(x) = 0,000148 \cdot x - 0,044297$$

$$y(x) = 0,000148 \cdot \frac{x^2}{2} - 0,044297 \cdot x + C_2 \quad y(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ donc } C_2 = 0$$

$$y(x) = 0,000148 \cdot \frac{x^2}{2} - 0,044297 \cdot x = 0,000074 \cdot x^2 - 0,044297 \cdot x$$

La flèche sera maxi au point C : -6,64

Principe de superposition

Dans la limite des déformations élastiques, le vecteur déformation en un point, dû à un système de forces extérieures est égal à la somme géométrique des vecteurs déformation dus à chacune des forces du système agissant séparément.

**Exemple**

On considère un IPE 180 reposant sur deux appuis linéaires rectilignes parfaits en A et B

Cette poutre, dont on ne négligera pas le poids supporte en C une charge verticale concentrée $\vec{C}_{4 \rightarrow 1} = -1200 \cdot \vec{y}$

Hypothèses :

- poids linéique : $p = 188 \text{ N/m}$
- moment quadratique $I_{GZ} = 1\,317 \text{ cm}^4$
- module de Young : $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$
- longueur $l = 3 \text{ m}$

Calculer la flèche en I, milieu de la poutre

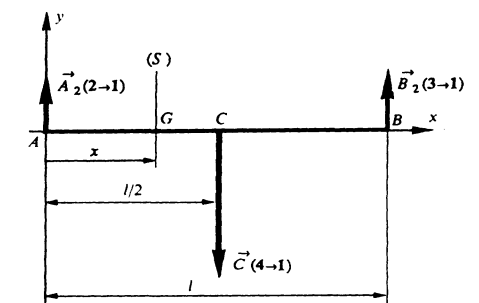
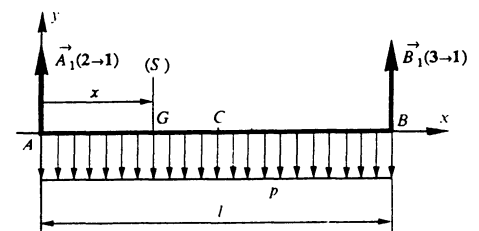
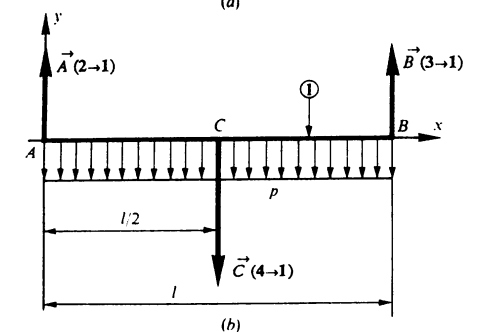
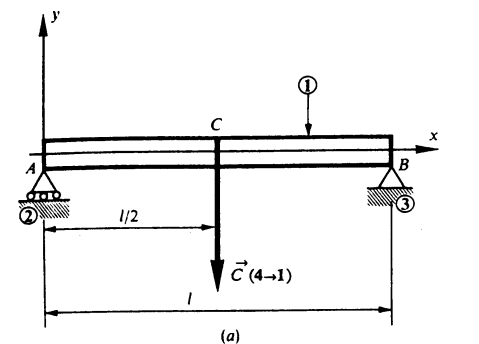
Considérons dans un premier temps la poutre soumise à la charge répartie p uniquement

$$y_1(I) = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{5 \cdot 0,188 \cdot 3000^4}{384 \cdot 200000 \cdot 1317 \cdot 10^4} = 0,075 \text{ mm}$$

Considérons dans un deuxième temps la poutre soumise à la charge concentrée uniquement

$$y_2(I) = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{1200 \cdot 3000^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1317 \cdot 10^4} = 0,256 \text{ mm}$$

Utilisons le principe de superposition : $y = y_1 + y_2 = 0,075 + 0,256 = 0,331 \text{ mm}$



Flexion de poutres hyperstatiques

Les seules équations de la statique ne suffisant pas pour résoudre le calcul des actions aux appuis. Il faut faire intervenir en plus les équations de déformations.

Exemple 1

Une poutre AB en HEA 600 ($I_{GZ} = 4786 \text{ cm}^4$; $E = 2.10^5 \text{ MPa}$) de longueur $l = 4\text{m}$ encastée à ses deux extrémités supporte en C une charge $\vec{F} = -5000.\vec{y}$

Déterminer les actions en A et B

Equations de statique :

$$A_{1 \rightarrow S} = B_{2 \rightarrow S} = F/2 \text{ (symétrie)}$$

$$M_{A1 \rightarrow S} - \frac{Fl}{2} + M_{B2 \rightarrow S} + B_{2 \rightarrow S}.l = 0 :$$

$$M_{A1 \rightarrow S} - \frac{Fl}{2} + M_{B2 \rightarrow S} + \frac{Fl}{2} = 0$$

$$\text{donc } M_{A1 \rightarrow S} = M_{B1 \rightarrow S}$$

le système est hyperstatique d'ordre 1

Equation de déformation :

Calcul du moment fléchissant quand $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$\{T_{coh}\} = -\{T_{ext \rightarrow S}\} = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ A_{1 \rightarrow S} & 0 \\ 0 & M_{A1 \rightarrow S} - A_{1 \rightarrow S}.x \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ A_{1 \rightarrow S} & 0 \\ 0 & -M_{A1 \rightarrow S} + A_{1 \rightarrow S}.x \end{Bmatrix}_G \quad M_{fz} = A_{1 \rightarrow S}.x - M_{A1 \rightarrow S}$$

Utilisation de l'expression de la déformée

$$E.I_{GZ}.y'' = A_{1 \rightarrow S}.x - M_{A1 \rightarrow S}$$

$$E.I_{GZ}.y' = A_{1 \rightarrow S}.\frac{x^2}{2} - M_{A1 \rightarrow S}.x + C_1$$

$$E.I_{GZ}.y = A_{1 \rightarrow S}.\frac{x^3}{6} - M_{A1 \rightarrow S}.\frac{x^2}{2} + C_1.x + C_2$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

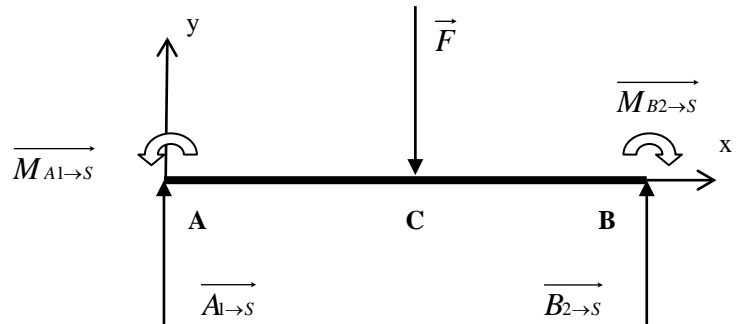
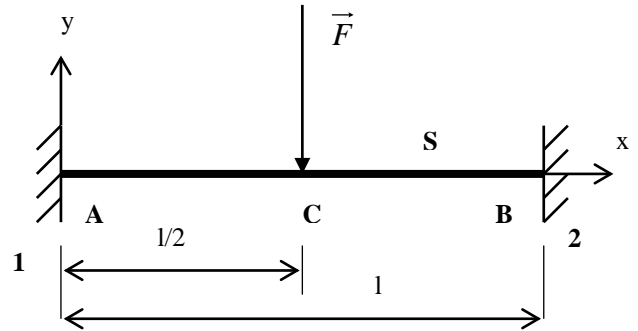
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ donc } E.I_{GZ}.y = A_{1 \rightarrow S}.\frac{x^3}{6} - M_{A1 \rightarrow S}.\frac{x^2}{2}$$

Compte tenu de la symétrie de la déformée : $y'(\frac{l}{2}) = 0$ donc

$$0 = A_{1 \rightarrow S}.\frac{(\frac{l}{2})^2}{2} - M_{A1 \rightarrow S}.\frac{l}{2} = \frac{A_{1 \rightarrow S}}{2}.\frac{(\frac{l}{2})^2}{2} - M_{A1 \rightarrow S}.\frac{l}{2} \Rightarrow M_{A1 \rightarrow S} = \frac{\frac{A_{1 \rightarrow S}}{2}.\frac{(\frac{l}{2})^2}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{A_{1 \rightarrow S}.l}{4}$$

$$A_{1 \rightarrow S} = \frac{F}{2} \text{ donc}$$

$$M_{A1 \rightarrow S} = M_{B2 \rightarrow S} = \frac{F.l}{8}$$



Torseur de cohésion pour $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

$$\{T_{coh}\} = -\{T_{ext \rightarrow S-}\} = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F/2 & 0 \\ 0 & M_{A1 \rightarrow S} - \frac{Fx}{2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -M_{A1 \rightarrow S} + \frac{Fx}{2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{Fl}{8} + \frac{Fx}{2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot (x - \frac{l}{4}) \end{Bmatrix}_G$$

$$\overrightarrow{M_{G \rightarrow S}} = \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow S}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{A1 \rightarrow S} = \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ \frac{Fl}{8} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ \frac{Fl}{8} & -\frac{Fx}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ \frac{Fl}{8} & \frac{Fx}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{Fl}{8} - \frac{Fx}{2} \cdot \vec{z}$$

Torseur de cohésion pour $\frac{l}{2} \leq x \leq l$

$$\{T_{coh}\} = \{T_{ext \rightarrow S+}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & M_{B2 \rightarrow S} + B_{2 \rightarrow S} \cdot (l-x) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{F \cdot l}{8} + \frac{F(l-x)}{2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} \cdot (-\frac{l}{4} + (l-x)) \end{Bmatrix}_G$$

$$\overrightarrow{M_{G2 \rightarrow S}} = \overrightarrow{M_{B2 \rightarrow S}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{B2 \rightarrow S} = \begin{vmatrix} 0 & l-x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ -\frac{Fl}{8} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ -\frac{Fl}{8} & -\frac{F(l-x)}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{2} \\ \frac{Fl}{8} & \frac{F(l-x)}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{Fl}{8} + \frac{F(l-x)}{2} \cdot \vec{z}$$

Effort tranchant

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} : T_y = -\frac{F}{2} = -2500N$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l : T_y = \frac{F}{2} = 2500N$$

Moment fléchissant

$$x=0 : M_{fz} = -\frac{Fl}{8} = -\frac{5000 \cdot 4}{8} = -2500N.m$$

$$x=\frac{l}{2} : M_{fz} = \frac{Fl}{8} = \frac{5000 \cdot 4}{8} = 2500N.m$$

$$x=l : M_{fz} = -\frac{Fl}{8} = -\frac{5000 \cdot 4}{8} = -2500N.m$$

Flèche maximale au point C

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y = A_{1 \rightarrow S} \cdot \frac{x^3}{6} - M_{A1 \rightarrow S} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{F}{12} \cdot x^3 - \frac{Fl}{16} \cdot x^2$$

$$E \cdot I_{Gz} \cdot y = -\frac{F}{12} \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{Fl}{16} \cdot \frac{l^3}{4} = -\frac{Fl^3}{96} + \frac{Fl^3}{64} = \frac{Fl^3}{32} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{Fl^3}{32 \cdot 6}$$

$$y = -\frac{F \cdot l^3}{192 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5000 \cdot 4000^3}{192 \cdot 200000 \cdot 4786000} = -1,74mm$$

